TEORETISK FYSIK
KTH

TENTAMEN I KVANTFYSIK

Kvantfysik SI1151 för F3
Onsdag 121017 kl. 14.00-19.00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	Teoretisk fysiks formelsamling, BETA och miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 5537 8475

1. Ett spinn-1 system är i tillståndet $|\Psi\rangle = A(|1\rangle + 2|0\rangle + 2i|-1\rangle)$ där basvektorerna är i S_z basen.
(a) Normera $|\Psi\rangle$.
(b) Vilka möjliga resultat kan en mätning av S_z ge och vad är sannolikheten för de olika mätresultaten?
(c) Beräkna väntevärdet $\langle S_z\rangle$ och osäkerheten $\langle \Delta S_z\rangle = \sqrt{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2}$.

2. En partikel finns i en endimensionell oändlig lådpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } 0 < x < L \\ \infty & \text{för } x < 0 \text{ och för } x > L \end{cases}$$

Vågfunktionen vid tiden $t = 0$ är

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{\phi_1(x) + 2\phi_2(x)}{\sqrt{5}}$$

där $H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$. Bestäm väntevärdet av energin $\langle H\rangle$ vid tiden t.

3. En elektron i en metall rör sig i den positiva x-riktningen med energi $E > 0$. Elektronen närmar sig metallytan vid $x = 0$ från metallens insida. Metallytan modelleras som en stegpotential:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{för } x < 0 \quad \text{(inuti metallen)} \\ 0 & \text{för } x > 0 \quad \text{(utanför metallen)} \end{cases}$$

där $V_0 > 0$ är en konstant. Bestäm sannolikheten att elektronen reflekteras i $x = 0$.

4. Två identiska partiklar med massa m och spinn 0 är bundna i en gemensam endimensionell harmonisk oscillator potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Bestäm första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin från en störning $H' = c(x_1 - x_2)^2$, där x_1 och x_2 partiklarnas positionskoordinater och $c > 0$ är en konstant.

VÄND!

5. (a) Visa att

$$[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p},T]=\frac{i\hbar}{m}\mathbf{p}^2 \quad \text{och} \quad [\mathbf{r}\cdot\mathbf{p},V]=-i\hbar r\frac{dV}{dr}$$

där $T=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ är kinetiska energin, och potentiella energin $V=V(r)$ antas bero bara på den radiella koordinaten $r=|\mathbf{r}|$.

(b) Visa att i ett energiegentillstånd $|E\rangle$ med energiegenvärde E blir

$$\langle E|[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p},H]|E\rangle=0$$

där $H=T+V$, och att detta ger

$$2\langle E|T|E\rangle=\langle E|r\frac{dV}{dr}|E\rangle$$

Detta är den kvantmekaniska versionen av virialsatsen.

(c) Visa att

$$\langle E|T|E\rangle=\langle E|V|E\rangle \quad \text{om potentialen är} \quad V(r)=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

och att

$$\langle E|T|E\rangle=-\frac{1}{2}\langle E|V|E\rangle \quad \text{om potentialen är} \quad V(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

LYCKA TILL!

Formler

Energinivåer och egenfunktioner för en partikel i en oändlig potentialbrunn:

$$E_n=\frac{\hbar^2k_n^2}{2m}\ ,\ \phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin k_nx\ ,\ k_n=\frac{n\pi}{L}\ ,\ n=1,2,3,...$$

Spin-1 operatorer:

$$S_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ ,\ S_y=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\ ,\ S_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Lösning till tentamen i Kvantfysik 121017

1. (a) Normering: Mha $\langle i|j\rangle = \delta_{i,j}$ fås

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = A^*(\langle 1| + 2\langle 0| - 3i\langle -1|)A(|1\rangle + 2|0\rangle + 2i|-1\rangle)|A|^2(1+4+4) = 9|A|^2 = 1$$

Välj $A = 1/3$:

$$|\Psi\rangle = \frac{|1\rangle + 2|0\rangle + 2i|-1\rangle}{3}$$

(b) Möjliga mätvärden och sannolikheter att få dessa:

$$S_z = \hbar\ ,\ P(+\hbar) = |\langle 1|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_z = 0\ ,\ P(0) = |\langle 0|\Psi\rangle|^2 = \frac{4}{9}$$

$$S_z = -\hbar\ ,\ P(-\hbar) = |\langle -1|\Psi\rangle|^2 = \frac{4}{9}$$

(c) Väntvärde och osäkerhet:

$$\langle S_z\rangle = \sum_{S_z} S_z P(S_z) = \hbar\frac{1}{9} + 0 - \hbar\frac{4}{9} = -\frac{1}{3}\hbar$$

$$\langle S_z^2\rangle = \sum_{S_z} S_z^2 P(S_z) = \hbar^2\frac{1}{9} + 0 + (-\hbar)^2\frac{4}{9} = \frac{5}{9}\hbar^2$$

$$\Delta S_z = \sqrt{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2} = \sqrt{\frac{5}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^2}\hbar = \frac{2}{3}\hbar$$

(Väntevärdena går även att beräkna med matrismultiplikation.)

---

2. Tillståndet vid tiden t är

$$\Psi(x,t) = \frac{\phi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + 2\phi_2(x)e^{-i\omega_2 t}}{\sqrt{5}}$$

där $E_n = \hbar\omega_n$. Energins väntevärde vid tiden t:

$$\langle H(t)\rangle = \langle\Psi(x,t)|H|\Psi(x,t)\rangle$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^L dx\,(\phi_1(x)e^{+i\omega_1 t} + 2\phi_2(x)e^{+i\omega_2 t})(\underbrace{H\phi_1(x)}_{=E_1\phi_1(x)}e^{-i\omega_1 t} + 2(\underbrace{H\phi_1(x)}_{=E_2\phi_2(x)}e^{-i\omega_2 t})$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^L dx\,\left(E_1\phi_1(x)^2 + 4E_2\phi_2(x)^2 + 2E_1E_2(e^{+i(\omega_2-\omega_1)t} + e^{-i(\omega_2-\omega_1)t})\phi_1(x)\phi_2(x)\right)$$

Använd att egenfunktionerna är ON: $\langle m|n\rangle = \int_0^L dx\,\phi_m\phi_n = \delta_{m,n} \Rightarrow$

$$\langle H(t)\rangle = \frac{1}{5}(E_1 + 4E_2 + 0) = \frac{1}{5}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2} + 4\frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{L^2}\right) = \frac{17}{10}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2}$$

vilket är oberoende av tiden t och uttrycker energikonservation.

3. Lösning till Schrödinger-ekvationen:

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{för } x < 0 \\ Ce^{iqx} & \text{för } x > 0 \end{cases}$$

där $k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$ och $q^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Kontinuitetsvillkor på $\Psi(0)$ och $\psi'(0)$:

$$\Psi(0): \quad A + B = C$$

$$\Psi'(0): \quad ikA - ikB = iqC$$

Subtrahera första ekvationen multiplicerad med iq från den andra ekvationen:

$$i(k-q)A - i(k+q)B = 0$$

Reflektionssannolikheten blir

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2}$$

(Notera att transmissionssannolikheten

$$T = 1 - R = 1 - \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2} = \frac{4kq}{(k+q)^2} = \frac{q}{k}\left|\frac{C}{A}\right|^2$$

innehåller en faktor $\frac{q}{k}$ vilket visar att transmissionssannolikheten även beror på ändringen i hastighet vid barriären.)

---

4. Eftersom partiklarna har heltaligt spinn är de bosoner och har symmetriskt grundtillstånd under utbyte av partiklarna:

$$|\Psi\rangle = |n_1 = 0, n_2 = 0\rangle|S_{z1} = 0, S_{z2} = 0\rangle$$

Den ostörda grundtillståndsenergin är $E_0^{(0)} = 2\frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega$. Skriv störningen som

$$H' = c(x_1 - x_2)^2 = c(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$

Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin är $E_0^{(1)} = \langle\Psi|H'|\Psi\rangle$. När vi beräknar denna utnyttjar vi att tillstånden är normerade så att $\langle n_1|n_1\rangle = 1$, $\langle S_{z1}|S_{z1}\rangle = 1$, osv, och skriver bara ut matriselement som inte direkt normerar till 1:

$$E_0^{(1)} = \langle\Psi|H'|\Psi\rangle = c\langle n_1 = 0, n_2 = 0|(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)|n_1 = 0, n_2 = 0\rangle$$

$$= c(\langle n_1 = 0|x_1^2|n_1 = 0\rangle + \langle n_2 = 0|x_2^2|n_2 = 0\rangle - 2\langle n_1 = 0|x_1|n_1 = 0\rangle\langle n_2 = 0|x_2|n_2 = 0\rangle)$$

Beräkna väntevärdena mha operatoridentiteten $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a) \Rightarrow$

$$\langle 0|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\langle 0|a^\dagger|0\rangle + \langle 0|a|0\rangle) = 0$$

$$\langle 0|x^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|(a^\dagger + a)^2|0\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}(\underbrace{\langle 0|(a^\dagger)^2|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|a^2|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|a^\dagger a|0\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 0|aa^\dagger|0\rangle}_{=1}) = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Detta ger:

$$E_0^{(1)} = c\frac{\hbar}{m\omega}$$

5. (a) Kinetiska energi-termen:

$$[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, T] = \frac{1}{2m}[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, \mathbf{p}^2] = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{r}\cdot\underbrace{[\mathbf{p},\mathbf{p}^2]}_{=0} + \underbrace{[\mathbf{r},\mathbf{p}^2]}_{=2i\hbar\mathbf{p}}\cdot\mathbf{p}\right) = \frac{i\hbar}{m}\mathbf{p}^2$$

Den sista kommutatorn ovan följer ur: $[x, p_x^2] = p_x[x, p_x] + [x, p_x]p_x = 2i\hbar p_x$.

Potentiella energi-termen:

$$[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, V]\psi = -i\hbar(\mathbf{r}\cdot\underbrace{\nabla(V\psi)}_{=\psi\nabla V + V\nabla\psi} - V\mathbf{r}\cdot\nabla\psi) = -i\hbar r\frac{dV}{dr}\psi \;\;\Rightarrow\;\; [\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, V] = -i\hbar r\frac{dV}{dr}$$

där vi använt att $\mathbf{r}\cdot\nabla V = r\frac{dV}{dr}$.

(b) Vi kan beräkna väntevärdet på två sätt:

$$H|E\rangle = E|E\rangle \Rightarrow \langle E|[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, H]|E\rangle = \langle E|[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, E]|E\rangle = 0$$

$$(a) \Rightarrow = \langle E|[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, T]|E\rangle + \langle E|[\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}, V]|E\rangle = \langle E|\frac{i\hbar}{m}\mathbf{p}^2|E\rangle + \langle E| - i\hbar r\frac{dV}{dr}|E\rangle$$

$$= i\hbar\left(2\langle E|\frac{\mathbf{p}^2}{2m}|E\rangle - \langle E|r\frac{dV}{dr}|E\rangle\right) \;\;\Rightarrow\;\; 2\langle E|T|E\rangle = \langle E|r\frac{dV}{dr}|E\rangle$$

(c) För $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ blir

$$2\langle E|T|E\rangle = \langle E|r\frac{dV}{dr}|E\rangle = \langle E|rm\omega^2 r|E\rangle = 2\langle E|\frac{1}{2}m\omega^2 r^2|E\rangle = 2\langle E|V|E\rangle$$

$$\Rightarrow \;\; \langle E|T|E\rangle = \langle E|V|E\rangle$$

För $V(r) = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$ blir

$$2\langle E|T|E\rangle = \langle E|r\frac{dV}{dr}|E\rangle = \langle E|r\frac{+e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}|E\rangle = \langle E|\frac{+e^2}{4\pi\epsilon_0 r}|E\rangle = -\langle E|V|E\rangle$$

$$\Rightarrow \;\; \langle E|T|E\rangle = -\frac{1}{2}\langle E|V|E\rangle$$